

Title	Jacobi形式とMaa\$beta\$ relation(Automorphic representationの研究)
Author(s)	山崎, 正
Citation	数理解析研究所講究録 (1986), 583: 161-166
Issue Date	1986-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/99334
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Jacobi 形式 と Maass relation

九大理学部 山崎 正 (Tadashi Yamazaki)

2 次の重さ k の Siegel Eisenstein 級数 $E_k^{(2)}(\tau)$ を Fourier 展開

$$E_k^{(2)}(\tau) = \sum_{T \geq 0} a(T) e^{2\pi i \operatorname{Tr}(T\tau)}$$

したとき、その係数 $a(T)$ が、いわゆる Maass の関係

$$a\left(\begin{pmatrix} n & \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t & m \end{pmatrix}\right) = \sum_{d|(n,m,t)} d^{k-1} a\left(\begin{pmatrix} 1 & t/2d \\ t/2d & nm/d^2 \end{pmatrix}\right)$$

を満たすことが知られている。([Ma]) ここでは、Jacobi 形式の言葉で書くと、これが一般の次数の Siegel Eisenstein 級数に拡張されることを示す。証明については [Y] を見よ。

記号 n は自然数とする。 1_n を n 次単位行列、 0 を零行列とし、 $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$ で標準的な交代行列を表わし、 J_n の Similitude の群を

$$S_n = \{ M \in M_{2n}(\mathbb{R}) ; {}^t M J_n M = \nu J_n, \exists \nu \in \mathbb{R}, \nu > 0 \}$$

とする。 $M \in S_n$, ${}^t M J_n M = \nu J_n$ のとき $\nu = \nu(M)$ と書く。

Siegel Modular 群を $\Gamma_n = \operatorname{Sp}(n, \mathbb{Z})$ と書く。 n 次 Siegel 上半平面 $H_n = \{ \tau \in M_n(\mathbb{C}) ; \tau = {}^t \bar{\tau}, \operatorname{Im} \tau > 0 \}$ への S_n の作用を

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S_n$, $\tau \in H_n$ に対し, $M\tau = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}$ で定める。

自然数 m に対し $e^m(x) = e^{2\pi i x}$ とし $e^1 = e$ と書く。

以下 τ は H_n の変数, z は \mathbb{C}^n の変数を表わすものとする。

§1 Jacobi 形式

集合としての直積 $S_n^J = S_n \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ を考え,

$g_i = [M_i, X_i, \kappa_i] \in S_n^J$ ($i=1, 2$) に対し, 積 $g_1 g_2$ を

$$g_1 g_2 = [M_1 M_2, \frac{1}{\nu} X_1 M_2 + X_2, \frac{1}{\nu} \kappa_1 + \kappa_2 + \frac{1}{\nu} X_1 M_2 J^t X_2], \quad \nu = \nu(M_2)$$

で定義する。これにより S_n^J は群になる。またこの演算を, $\Gamma_n^J = \Gamma_n \times \mathbb{Z}^{2n} \times \mathbb{Z}$ に制限して部分群を得る。

正整数 k, m を固定する。 $H_n \times \mathbb{C}^n$ 上の関数 ϕ の S_n^J の作用を, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S_n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$, $\kappa \in \mathbb{R}$ に対し

$$\phi|_{k,m}[M, 0, 0](\tau, z) = \det(c\tau + d)^{-k} e^{m\nu(M)} (-z(c\tau + d)^{-1}c\bar{z}) \phi(M\tau, \nu(M)z(c\tau + d)^{-1})$$

$$\phi|_{k,m}[1_{2n}, (\lambda, \mu), \kappa](\tau, z) = e^m(\kappa + \lambda\tau^t\lambda + 2\lambda\bar{z} + \lambda^t\mu) \phi(\tau, z + \lambda\tau + \mu)$$

で定義する。

定義 $H_n \times \mathbb{C}^n$ 上の正則関数 ϕ が重さ k , index m の Jacobi 形式

とは, 次の条件が成立すること:

$$(i) \quad \phi|_{k,m} g = \phi \quad \text{for } \forall g \in \Gamma_n^J$$

$$(ii) \quad n=1 \text{ のときは "cusp" における正則性 (LE-Z)}.$$

我々は $n > 1$ のときのみを考えるから (ii) は問題にならない。
Jacobi 形式の一般論や Adele を用いた Formulation は村瀬氏の論文 [Mu] と参照せよ。

§2 例

(1) Fourier-Jacobi 展開

$\tau = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & t \end{pmatrix}$ を H_{n+1} の一般の点とし、 Γ_{n+1} に対する重さ k の保型形式 $\tilde{\phi}(\tau)$ を Fourier-Jacobi 展開する:

$$\tilde{\phi}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(\tau, z) e(mt).$$

このとき、

命題 1 $\phi_m(\tau, z)$ は重さ k , index m の Jacobi 形式である。

(2) Eisenstein 級数

Γ_n^J の部分群 $\Gamma_{n,0}^J = \{\gamma \in \Gamma_n^J; 1|_{k,m} = 1\}$ と考える。ここで 1 は定数値 1 を取る関数を表わす。 k を偶数として、Jacobi Eisenstein 級数 $E_{k,m}$ を

$$E_{k,m} = \sum_{\gamma \in \Gamma_{n,0}^J \backslash \Gamma_n^J} 1|_{k,m} \gamma$$

で定義する。

命題 2 k は偶数で $k > n+1$ とする。このとき $E_{k,m}$ は $H_n \times \mathbb{C}^n$ の任意のコンパクト集合上絶対かつ一様収束し、重さ k , index m の Jacobi 形式を定める。

(3) $(n+1)$ 次の重さ k の Siegel Eisenstein 級数 $E_k^{(n+1)}(\tau)$ を Fourier-Jacobi 展開する:

$$E_k^{(n+1)}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{k,m}(\tau, z) e(mt).$$

Fourier-Jacobi 係数 $c_{k,m}$ は Jacobi Eisenstein 級数を用いて書ける。

定理 ([B]) k は偶数で $k > n+2$ とする。任意の $m > 0$ に対し

$$c_{k,m}(\tau, z) = \sum_{d^2|m} \sigma_{k-1}\left(\frac{m}{d^2}\right) \sum_{a|d} \mu(a) E_{k, ma^2/d^2}\left(\tau, \frac{d}{a}z\right).$$

ここで、 $\sigma(d) = \sum_{a|d} a^k$, μ は Möbius 関数である。

§3 Hecke 作用素

S_n に含まれる整行列 M を取り、両側剰余類 $\Gamma_n M \Gamma_n$ を左剰余類に分割する:

$$\Gamma_n M \Gamma_n = \bigcup_i \Gamma_n M_i$$

ϕ を重さ k , index m の Jacobi 形式とし、 $\Gamma_n M \Gamma_n$ の中への作用を

$$\phi | \Gamma_n M \Gamma_n = \nu(M)^{n_k - \frac{n(n+1)}{2}} \sum_i \phi |_{k,m} [M_i, 0, 0]$$

で定義する。明らかにこれは代表系 $\{M_i\}$ の取り方に依らない。

命題 3 ϕ を重さ k , index m の Jacobi 形式, $M \in S_n$ を整行列とする。このとき $\phi | \Gamma_n M \Gamma_n$ は重さ k , index $m\nu(M)$ の Jacobi 形式である。

以下では素数 p を固定する。Freitag に従って

$$T(p) = \Gamma_n \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & p1_n \end{pmatrix} \Gamma_n, \quad T_{i,n-i}(p) = \Gamma_n \left(\begin{array}{c|c} 1_i & 0 \\ \hline 0 & p1_{n-i} \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ p1_i & 0 \\ \hline 0 & p1_{n-i} \end{array} \right) \Gamma_n$$

と置く。([F])

命題 4 ϕ を重さ k , index m の Jacobi 形式とする。このとき

$$(\phi | T_{0,n}(p^2))(\tau, z) = p^{nk - n(n+1)} \phi(\tau, pz).$$

Jacobi Eisenstein 級数に対しては、 $T(p)$ の作用が具体的に計算出来る。

定理 5 p を素数とする。

(i) $p \nmid m$ のとき

$$E_{k,m} | T(p) = \left\{ \prod_{i=1}^n (1+p^{k-i}) \right\} E_{k,mp}$$

(ii) $p \mid m$ のとき

$$E_{k,m} | T(p) = \left\{ \prod_{i=2}^n (1+p^{k-i}) \right\} \{ E_{k,m/p}(\tau, pz) + p^{k-1} E_{k,mp}(\tau, z) \}$$

上の定理と Böcherer の結果を結びつけると。

定理 6 p は素数とする。

(i) $p \nmid m$ のとき

$$e_{k,mp} = \left\{ \prod_{i=2}^n (1+p^{k-i})^{-1} \right\} e_{k,m} | T(p)$$

(ii) $p \mid m$ のとき

$$e_{k,mp} = \left\{ \prod_{i=2}^n (1+p^{k-i})^{-1} \right\} e_{k,m} | T(p) - p^{-(n-1)k + n^2 + n - 1} e_{k,m/p} | T_{0,n}(p^2)$$

上の定理は次のようにもいえる。 Γ_n の Hecke 環の similitude が m の元 $D_n(m)$ を形式的な等式

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_n(m) m^{-s} = \prod_{p: \text{prime}} \left\{ 1 - \prod_{i=2}^n (1+p^{i-1})^{-1} T(p) p^{-s} + T_{0,n}(p^2) p^{-(n-1)n + n^2 + n - 1 - 2s} \right\}^{-1}$$

で定義する。このとき、

定理 7 (Maap relation) 任意の $m > 0$ に対し

$$e_{k,m} = e_{k,1} | D_n(m)$$

が成立する。

注意 $n=1$ のとき上の Euler 積の p 因子は、

$$\left\{ 1 - T(p) p^{-s} + T_{0,1}(p^2) p^{1-2s} \right\}^{-1}$$

となり、これは $SL_2(\mathbb{Z})$ に対する標準的なものである。従っ

て " $D_2(m) = T(m)$ " となり、我々の定理 7 は、2 次の Eisenstein 級数に対する Maap relation に他ならない。([Ma])

文献

- [B] S. Böcherer "Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen,
Math. Z. 183 (1983) 21-46
- [E-Z] M. Eichler-D. Zagier Theory of Jacobi Forms, Progress in Math 55 (1985)
- [F] E. Freitag Siegelsche Modulfunktionen, Springer-Verlag (1983)
- [Ma] H. Maap "Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades
Inv. Math 52 (1979) 95-104
- [Mu] 村瀬 篤 この講究録
- [Y] T. Yamazaki On Jacobi forms of degree n , preprint